PROGRAMAÇÃO LINEAR

I N T R O D U Ç Ã O À P R O G R A M A Ç Ã O L I N E A R

Um problema geral de Programação Matemática pode apresentar-se na forma seguinte:

Maximizar (ou Minimizar) $F (X_1 , X_2 , X_3 , \ldots , X_n)$

sujeito a:

$$
\begin{array}{l}
f_1 (X_1 , X_2 , X_3 , \ldots , X_n) \quad \{ \leq ; \geq ; = \} \quad b_1 \\
f_2 (X_1 , X_2 , X_3 , \ldots , X_n) \quad \{ \leq ; \geq ; = \} \quad b_2 \\
\ldots \\
f_m (X_1 , X_2 , X_3 , \ldots , X_n) \quad \{ \leq ; \geq ; = \} \quad b_m
\end{array}
$$

Se a função objectivo **F** e as restrições f_1 , f_2 , ... , f_m forem funções lineares em relação às variáveis $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ estaremos perante um caso particular do problema anterior - um **problema de Programação Linear**:

Maximizar (ou Minimizar) $F = c_1 . X_1 + c_2 . X_2 + c_3 . X_3 + \ldots + c_n . X_n$

sujeito a:

$$
\begin{array}{l}
a_{11} . X_1 + a_{12} . X_2 + a_{13} . X_3 + \ldots + a_{1n} . X_n \quad \{ \leq ; \geq ; = \} \quad b_1 \\
a_{21} . X_1 + a_{22} . X_2 + a_{23} . X_3 + \ldots + a_{2n} . X_n \quad \{ \leq ; \geq ; = \} \quad b_2 \\
\ldots \\
a_{m1} . X_1 + a_{m2} . X_2 + a_{m3} . X_3 + \ldots + a_{mn} . X_n \quad \{ \leq ; \geq ; = \} \quad b_m \\
\\
X_1 , X_2 , X_3 , \ldots , X_n \ \{ \geq 0 ; \leq 0 ; \in \Re \}
\end{array}
$$

O problema de Programação Linear anterior diz-se estar na **forma geral**, já que a função objectivo pode ser maximizada ou minimizada e as restrições poderão ser de três tipos ($\leq$; $\geq$; $=$) . Nesta forma, admite-se ainda que um problema de Programação Linear possa, para além das variáveis não negativas ($X_i \geq 0$) , apresentar variáveis não positivas ($X_i \leq 0$) , ou ainda variáveis livres ($X_i \in \Re$).

Se se pretender maximizar a função objectivo, sendo todas as restrições do tipo ≤ e todas as variáveis forem não negativas ($X_i \geq 0$) , diz-se que o problema de Programação Linear está na **forma canónica**.

Se se pretender maximizar a função objectivo, sendo todas as restrições do tipo = e todas as variáveis forem não negativas ($X_i \geq 0$) , diz-se que o problema de Programação Linear está na **forma standard**.

No quadro seguinte resume-se o que se acabou de referir:

	Problema de Programação Linear na forma		
	geral	**canónica**	**standard**
Função Objectivo	Max ; Min	Max	Max
Restrições	≤ ; ≥ ; =	≤	=
Variáveis	≥ 0 ; ≤ 0 ;∈ R	≥ 0	≥ 0

Para efeitos de resolução analítica de um problema de Programação Linear, muitas vezes é necessário que o problema esteja apresentado na sua forma mais "simples", isto é, na forma standard.

• Transformação "Forma Geral" ⇒ "Forma Canónica"

Consideremos o seguinte problema de Programação Linear, que se deseja exprimir na forma canónica:

Minimizar $F = 9 . X_1 - 5 . X_2 + 4 . X_3 - 8 . X_4$

sujeito a:

$$2 . X_1 + 6 . X_2 + 3 . X_3 - 1 . X_4 \leq 50$$
$$1 . X_1 - 2 . X_2 + 6 . X_3 + 3 . X_4 \geq 20$$
$$3 . X_1 + 2 . X_2 + 2 . X_3 + 1 . X_4 = 15$$

$X_1 \leq 0$; $X_2 \in R$; X_3 , $X_4 \geq 0$

Como se vê, o problema anterior está apresentado na forma geral, havendo necessidade de fazer alterações na função objectivo, nas restrições e nas variáveis para que o problema esteja apresentado na forma canónica.

- Função objectivo

Minimizar uma função é equivalente a maximizar a sua simétrica, ou seja, **Min F ⇔ Max G (com G = - F)**. Relativamente ao problema que estamos a tratar, ter-se-ia:

Min $F = 9 . X_1 - 5 . X_2 + 4 . X_3 - 8 . X_4 \Leftrightarrow$ **Max** $G = - F = - 9 . X_1 + 5 . X_2 - 4 . X_3 + 8 . X_4$

O valor óptimo da função objectivo "original" F (que designaremos por F*) relaciona--se facilmente com G*. Com efeito, **F* = - G***.

- Restrições

A primeira restrição é do tipo desejado ($\leq$), não sendo, por isso, necessário fazer qualquer alteração. No entanto, as duas últimas restrições precisam de ser re-escritas.

A segunda restrição pode ser "multiplicada" por -1, obtendo-se:

$$\mathbf{1 \,.\, X_1 - 2 \,.\, X_2 + 6 \,.\, X_3 + 3 \,.\, X_4 \;\geq\; 20 \;\Leftrightarrow\; -1 \,.\, X_1 + 2 \,.\, X_2 - 6 \,.\, X_3 - 3 \,.\, X_4 \;\leq\; -20}$$

De notar que este "expediente" nem sempre será muito útil, pois, por vezes, não desejaremos ter um termo independente de uma restrição com sinal negativo... Na altura própria voltaremos a esta questão.

Quanto à terceira restrição, poderemos escrever:

$$\mathbf{3 \,.\, X_1 + 2 \,.\, X_2 + 2 \,.\, X_3 + 1 \,.\, X_4 = 15} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \mathbf{3 \,.\, X_1 + 2 \,.\, X_2 + 2 \,.\, X_3 + 1 \,.\, X_4 \;\leq\; 15} \\ \mathbf{3 \,.\, X_1 + 2 \,.\, X_2 + 2 \,.\, X_3 + 1 \,.\, X_4 \;\geq\; 15} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{cases} \mathbf{3 \,.\, X_1 + 2 \,.\, X_2 + 2 \,.\, X_3 + 1 \,.\, X_4 \;\leq\; 15} \\ \mathbf{-3 \,.\, X_1 - 2 \,.\, X_2 - 2 \,.\, X_3 - 1 \,.\, X_4 \;\leq\; -15} \end{cases} .$$

- Variáveis

A variável $\mathbf{X_1}$ é não positiva, pelo que não deverá figurar na forma canónica. Se considerarmos a variável $\mathbf{Y_1 = - X_1 \geq 0}$ estaremos perante uma variável não negativa, como se desejava. Deve-se trocar, na função objectivo e nas restrições, a variável $\mathbf{X_1}$ por $\mathbf{-Y_1}$. O valor óptimo de $\mathbf{X_1}$ obtém-se facilmente a partir do valor óptimo de $\mathbf{Y_1}$: $\mathbf{X_1^* = - Y_1^*}$.

Quanto à variável livre $\mathbf{X_2}$, poderemos socorrer-nos de um artifício que consiste em escrever essa variável como a diferença de duas variáveis não negativas, isto é, $\mathbf{X_2 = Y_2 - Z_2}$ com $\mathbf{Y_2, Z_2 \geq 0}$. Com efeito, embora $\mathbf{Y_2}$ e $\mathbf{Z_2}$ sejam não negativas, a sua diferença poderá ser positiva, nula ou negativa, garantindo-se que $\mathbf{X_2}$ é efectivamente uma variável livre. Na função objectivo e nas restrições, a variável $\mathbf{X_2}$ deverá ser trocada por $\mathbf{Y_2 - Z_2}$. O valor óptimo de $\mathbf{X_2}$ obtém-se facilmente a partir dos valores óptimos de $\mathbf{Y_2}$ e de $\mathbf{Z_2}$: $\mathbf{X_2^* = Y_2^* - Z_2^*}$.

As variáveis $\mathbf{X_3}$ e $\mathbf{X_4}$ são não negativas, pelo que não precisam de ser alteradas.

Poderemos, agora, escrever o problema, que temos vindo a tratar, na forma canónica:

Maximizar $\mathbf{G = +9 \,.\, Y_1 + 5 \,.\, Y_2 - 5 \,.\, Z_2 - 4 \,.\, X_3 + 8 \,.\, X_4}$

sujeito a:

$$\begin{aligned} &\mathbf{-2 \,.\, Y_1 + 6 \,.\, Y_2 - 6 \,.\, Z_2 + 3 \,.\, X_3 - 1 \,.\, X_4 \;\leq\; 50} \\ &\mathbf{+1 \,.\, Y_1 + 2 \,.\, Y_2 - 2 \,.\, Z_2 - 6 \,.\, X_3 - 3 \,.\, X_4 \;\leq -20} \\ &\mathbf{-3 \,.\, Y_1 + 2 \,.\, Y_2 - 2 \,.\, Z_2 + 2 \,.\, X_3 + 1 \,.\, X_4 \;\leq\; 15} \\ &\mathbf{+3 \,.\, Y_1 - 2 \,.\, Y_2 + 2 \,.\, Z_2 - 2 \,.\, X_3 - 1 \,.\, X_4 \;\leq -15} \end{aligned}$$

$$\mathbf{Y_1 , Y_2 , Z_2 , X_3 , X_4 \geq 0}$$

Após a resolução do problema, obter-se-ia os valores óptimos das variáveis $\mathbf{Y_1}$, $\mathbf{Y_2}$, $\mathbf{Z_2}$, $\mathbf{X_3}$ e $\mathbf{X_4}$ e da função objectivo **G**. Para obter a solução óptima do problema original e o valor óptimo da função objectivo F, basta fazer : $\mathbf{F^* = - G^*}$, $\mathbf{X_1^* = - Y_1^*}$ e $\mathbf{X_2^* = Y_2^* - Z_2^*}$. de notar que os valores óptimos das variáveis $\mathbf{X_3}$ e $\mathbf{X_4}$ se obtêm directamente sem ser necessário fazer qualquer transformação.

• Transformação "Forma Canónica" ⇒ "Forma Standard"

Esta transformação é muito fácil de se fazer. Com efeito, não há alterações a introduzir quer na função objectivo, quer nas variáveis. Basta apenas **transformar as restrições do tipo ≤ (da forma canónica) para o tipo = (da forma standard)**.

Imagine-se que se pretende transformar a restrição $\mathbf{2 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \leq 50}$ numa igualdade. Tal pode ser feito com facilidade, mediante a **introdução de uma variável de folga ou de desvio $\mathbf{F_1}$** ($\mathbf{F_1 \geq 0}$) :

$$\mathbf{2 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \leq 50 \Leftrightarrow 2 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 + F_1 = 50 \text{ , com } F_1 \geq 0}.$$

Observemos que quando $\mathbf{F_1 = 0}$, se tem $\mathbf{2 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 = 50}$; pelo contrário, se $\mathbf{F_1 > 0}$, tem-se $\mathbf{2 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 < 50}$, isto é, tal como se pretendia tem--se $\mathbf{2 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \leq 50}$.

Assim, para se re-escrever na forma standard um problema de Programação Linear expresso na forma canónica, bastará **adicionar ao primeiro membro de cada restrição uma variável de folga** [Atenção: uma por cada restrição !] **passando a desigualdade ≤ a uma igualdade**.

• Transformação "Forma Geral" ⇒ "Forma Standard"

Um problema de Programação Linear expresso na forma geral pode passar-se á forma standard levando a cabo os procedimentos já descritos (Transformação "Forma Geral" ⇒ "Forma Canónica") relativos à função objectivo e às variáveis.

No tocante às restrições nada há a fazer relativamente às igualdades; relativamente às restrições do tipo ≤ adopta-se o procedimento descrito acima (Transformação "Forma Canónica" ⇒ "Forma Standard") e **relativamente às restrições do tipo ≥** adopta-se um procedimento similar (isto é, **bastará <u>subtrair</u> ao primeiro membro de cada restrição do tipo ≥ uma variável de folga** [Atenção: uma por cada restrição !] **passando a desigualdade a uma igualdade**).

FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Comecemos por considerar o seguinte **problema 1** :

A FARLACT é uma fábrica onde são produzidos dois tipos de farinhas lácteas (A e B) .

Estas farinhas são enriquecidas com dois aditivos. Por cada tonelada de farinha A são necessários um quilograma de aditivo P e três quilogramas de aditivo Q. Por cada tonelada de farinha B são necessários dois quilogramas de aditivo P e dois quilogramas de aditivo Q.

Sabe-se que, em cada semana, a FARLACT não dispõe de mais de 20 Kg e 30 Kg, respectivamente, de aditivos P e Q.

Os donos da FARLACT exigem que a produção mensal conjunta das farinhas A e B não seja inferior a 20 toneladas.

Por cada tonelada de farinha A vendida, a FARLACT tem um lucro de 7 unidades monetárias (u.m.), sendo de 10 u.m. o lucro associado à venda de uma tonelada de farinha B.

Como se pode determinar o plano de produção que maximiza o lucro da FARLACT ?

Quando somos confrontados com um problema como o anterior, poderemos formular **três questões importantes**:

1 - Qual o objectivo a atingir ?

Relativamente a este problema, o enunciado é relativamente explícito: pretende-se **maximizar o lucro**.

Note-se que noutros problemas similares (em termos de estrutura) poderemos ter objectivos muito diferentes: "minimizar desperdícios", "minimizar custos", "minimizar tempos de espera", "maximizar a satisfação" ...

Genericamente o objectivo do problema pode traduzir-se na maximização de um benefício, ou na minimização de um prejuízo.

2 - Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo?

Referimo-nos, obviamente, a decisões ou actividades que influam no objectivo ...

Assim, relativamente ao problema em análise poderemos indicar sucintamente as decisões que irão influir no lucro da FARLACT:

- produzir farinha A
- produzir farinha B

3 - Que recursos são consumidos (quando se leva a cabo as actividades referidas) ? Que condicionalismos são impostos ?

Como se pode constatar pelo enunciado:
- consome-se aditivo P
- consome-se aditivo Q
- exige-se a produção mensal mínima conjunta (A + B) de 20 ton.

Retomemos a questão **2** (**Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo ?**). Poderemos associar às respostas a esta questão (**produzir farinha A / produzir farinha B**) uma nova questão: **Quanto ? Com que intensidade se deve levar a cabo as actividades referidas ?**

Que actividades ?	$\rightarrow$	**Quanto ?**
produzir farinha A	$\rightarrow$	X_A
produzir farinha B	$\rightarrow$	X_B

Definamos, então, as **variáveis** X_A e X_B :
X_A é a quantidade de farinha A a produzir;
X_B é a quantidade de farinha B a produzir;

- Uma primeira conclusão a reter diz respeito à não negatividade destas variáveis:

$$X_A \geq 0 \ , \ X_B \geq 0 \ .$$

Retomemos a questão **3** (**Que recursos são consumidos (quando se leva a cabo as actividades referidas) ? Que condicionalismos são impostos ?**).

Tínhamos referido que um dos recursos consumidos era o **aditivo P**. De acordo com o enunciado, semanalmente, só se dispõe de, no máximo, 20 Kg de aditivo P. Por outro lado, sabe-se que por cada tonelada de farinha A produzida é necessário 1 Kg de aditivo P e que por cada tonelada de farinha B produzida são necessários 2 Kg desse mesmo aditivo.

Como já definimos X_A e X_B como "as ***quantidades*** de farinha A e B, respectivamente, a produzir", podemos agora tentar representar analiticamente a **restrição** associada ao **recurso "aditivo P"**. Mas ... ***quantidades*** ? Quilogramas ? Toneladas ? ... **Na definição das variáveis é fundamental dar particular atenção às unidades !**

Redefinamos, então, com mais cuidado, as variáveis:

X_A é a quantidade **(em toneladas)** de farinha A a produzir;
X_B é a quantidade **(em toneladas)** de farinha B a produzir;

Se cada tonelada de farinha A consome 1 Kg de aditivo P, poderemos dizer que $1 \cdot X_A$ representa a quantidade (em Kg) de aditivo P consumido na produção de farinha A. Analogamente, $2 \cdot X_B$ representa a quantidade (em Kg) de aditivo Q consumido na produção de farinha B. Assim, $1 \cdot X_A + 2 \cdot X_B$ representa o consumo total de aditivo P (em Kg) necessário à produção das farinhas A e B.

Sabemos que, no máximo, se dispõe de 20 Kg de aditivo P **por semana**.

Poderemos agora tentar escrever a **restrição** relativa ao consumo do **aditivo P**:

Consumo total do aditivo P $\leq$ **Disponibilidade do aditivo P**

$\Downarrow$ $\Downarrow$

? **semanal : 20 Kg**

Deverá ter-se o cuidado de verificar que a **restrição** esteja **dimensionalmente correcta** ! Isto é, se a disponibilidade de aditivo P é expressa em **Kg / semana** , esta deverá também ser a unidade a adoptar para o consumo total !

Ou seja, quando definimos as variáveis, dever-se-ia ter especificado o **período de tempo** associado à produção das farinhas ... Isto é, quando definimos X_A como a quantidade (em toneladas) de farinha A a produzir pela FARLACT, dever-se-ia ter indicado se se tratava de produção semanal, mensal ou anual ...

Redefinamos, então, cuidadosamente, as variáveis:

X_A é a quantidade (em toneladas) de farinha A a produzir **semanalmente**;
X_B é a quantidade (em toneladas) de farinha B a produzir **semanalmente**;

Nunca é demais recordar a não negatividade destas variáveis: $X_A \geq 0$, $X_B \geq 0$.

Poderemos, agora, re-analisar o significado de " $1 \cdot X_A + 2 \cdot X_B$ " : trata-se do consumo total de aditivo P (em Kg) necessário à produção semanal das farinhas A e B. Sabendo que a disponibilidade semanal deste recurso é de 20 Kg, poderemos, agora, escrever a correspondente restrição:

Aditivo P : $1 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \leq 20$ (Kg/semana)

Analogamente, se tivermos em conta que cada tonelada de farinha A requer 3 Kg de aditivo Q e que cada tonelada de farinha B requer 2 Kg desse mesmo aditivo (do qual se dispõe, no máximo, de 30 Kg por semana), poderemos escrever a correspondente restrição:

Aditivo Q : $3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \leq 30$ (Kg/semana)

Não há outros **recursos** envolvidos neste problema, mas há um **condicionalismo** que é imposto: "A produção mensal conjunta de A e B não deve ser inferior a 20 toneladas". Se nos recordarmos da definição das variáveis e se, por simplicidade, admitirmos que um mês tem quatro semanas, poderemos representar esse condicionalismo pela restrição seguinte:

Prod.mensal A+B : $4 \cdot (X_A + X_B) \geq 20$ (ton) , ou, equivalentemente,

$$X_A + X_B \geq 5 \quad \text{(ton)} .$$

Poderemos agora tratar da questão **1** (**Qual o objectivo a atingir ?)**, que já tinha sido respondida (**maximizar o lucro**). Tentemos exprimir, usando as variáveis definidas, este objectivo.

Se o lucro associado à produção de uma tonelada de farinha A é de 7 u.m. e se o correspondente valor associado à produção de farinha B é de 10 u.m., poderemos escrever 7 (u.m. / ton A) . X_A (ton A / sem.) + 10 (u.m. / ton B) . X_B (ton B / sem.) que está expresso em u.m. por semana.

Assim, $F = 7 \cdot X_A + 10 \cdot X_B$ é a **função objectivo**, que representa o lucro semanal da FARLACT (em u.m.), que se pretende maximizar.

De notar que o enunciado indicava apenas que se pretendia maximizar o lucro. Poderemos, sem qualquer problema, exprimir este objectivo numa base semanal, isto é, passar a maximizar o lucro semanal.

Poderemos agora resumir a **formulação do problema 1**:

Seja X_i a quantidade (em toneladas) de farinha i = A ; B a produzir semanalmente, com $X_i \geq 0$.

MAX $F = 7 \cdot X_A + 10 \cdot X_B$

sujeito a:

$$1 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \leq 20$$
$$3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \leq 30$$
$$1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B \geq 5$$

$$X_A , X_B \geq 0 .$$

Concluída a **formulação** deste problema, deixemos a sua **resolução** para uma altura posterior ...

Recordemo-nos que na **formulação de problemas** de Programação Linear pode ser útil responder a **três questões importantes**:

- **Qual o objectivo a atingir ?**

  ... Max / Min ... → função objectivo

- **Que actividades (com influência no objectivo) devem ser levadas a cabo ?**
  Que decisões devem ser tomadas ?

  ... Qual a sua intensidade ?

  ... → variáveis

  Atenção ao cuidado a ter na definição das variáveis... Não esquecer as unidades ... Não esquecer o carácter de não negatividade das variáveis ...

- **Que recursos são consumidos (quando se leva a cabo as actividades) ?**
  Que condicionalismos são impostos ?

  ... → restrições

Consideremos agora uma variante do problema anterior - o **problema 2** :

A DUOLACT é uma empresa que produz dois tipos de farinhas lácteas (A e B) em duas fábricas (F1 e F2).

Estas farinhas são enriquecidas com dois aditivos. Por cada tonelada de farinha A são necessários um quilograma de aditivo P e três quilogramas de aditivo Q. Por cada tonelada de farinha B são necessários dois quilogramas de aditivo P e dois quilogramas de aditivo Q.

Sabe-se que, em cada semana, a fábrica F1 não dispõe de mais de 10 Kg e 18 Kg, respectivamente, de aditivos P e Q. Os correspondentes valores para a fábrica F2 são, respectivamente, 12 Kg e 14 Kg.

Os donos da DUOLACT exigem que a produção mensal conjunta das farinhas A e B não seja inferior a 20 toneladas.

O quadro seguinte indica os lucros (em u.m.) associados à produção de uma tonelada de cada tipo de farinha, em função da fábrica:

	F1	F2
A	6	7
B	10	11

Como se pode determinar o plano de produção que maximiza o lucro da DUOLACT ?

Para formularmos este problema poderemos recordar as **três questões importantes**:

1 - Qual o objectivo a atingir ?

À semelhança do problema anterior, também aqui se pretende **maximizar o lucro**.

2 - Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo?

- produzir farinha A
- produzir farinha B

3 - Que recursos são consumidos (quando se leva a cabo as actividades referidas) ? Que condicionalismos são impostos ?

- consome-se aditivo P
- consome-se aditivo Q
- exige-se a produção mensal mínima conjunta (A + B) de 20 ton.

Se adoptarmos as **variáveis** X_A e X_B definidas no problema 1:

X_A é a quantidade (em toneladas) de farinha A a produzir **semanalmente**;
X_B é a quantidade (em toneladas) de farinha B a produzir **semanalmente**;

verificando-se ainda: $X_A \geq 0$, $X_B \geq 0$, poderemos tentar formular o problema, em termos de restrições e de função objectivo:.

Relativamente ao condicionalismo da produção mensal conjunta mínima pode escrever-se facilmente:

Prod.mensal A+B : $4 \, . \, (X_A + X_B) \geq 20$ (ton) , ou, equivalentemente,

$$X_A + X_B \geq 5 \text{ (ton)} .$$

No que toca aos aditivos P e Q já não conseguiremos chegar às restrições ...

		Prob.2
Aditivo P :	$1 \, . \, X_A + 2 \, . \, X_B \leq$ [Prob.1 : 20]	$\rightarrow$ 10 F1 $\rightarrow$ 12 F2
Aditivo Q :	$3 \, . \, X_A + 2 \, . \, X_B \leq$ [Prob.1 : 30]	$\rightarrow$ 18 F1 $\rightarrow$ 14 F2

Relativamente à função objectivo:

Prob.1: $F = 7 \, . \, X_A + 10 \, . \, X_B$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

Prob.2: (F1:6 ; F2:7) (F1:10 ; F2:11)

Como se vê, não conseguimos exprimir nem as restrições relativas aos aditivos P e Q nem a função objectivo ... Há necessidade de ter em conta as duas fábricas F1 e F2 ...

Retomemos, então a questão **2** (**Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo?). Quanto ? Com que intensidade se deve levar a cabo as actividades referidas ?** E, já agora, **onde ?**

Que actividades ?	$\rightarrow$	**Quanto ?**	$\rightarrow$	**Onde ?**		
produzir farinha A	$\rightarrow$	X_A	$\rightarrow$	**Fábrica F1**	$\rightarrow$	X_{A1}
				Fábrica F2	$\rightarrow$	X_{A2}
produzir farinha B	$\rightarrow$	X_B	$\rightarrow$	**Fábrica F1**	$\rightarrow$	X_{B1}
				Fábrica F2	$\rightarrow$	X_{B2}

Definamos, então, as **variáveis** X_{A1} , X_{A2} , X_{B1} , X_{B2} :

Genericamente X_{ij} é a quantidade (em toneladas) de farinha **i** = A ; B a produzir semanalmente na fábrica F**j** , **j** = 1 ; 2 , isto é, por exemplo, X_{A1} é a quantidade (em toneladas) de farinha A a produzir semanalmente na fábrica F1.

Não nos esqueçamos de indicar que a**s variáveis definidas são não negativas**:

$$X_{A1} , X_{A2} , X_{B1} , X_{B2} \geq 0$$

Poderemos agora voltar a tentar escrever as **restrições**:

Relativamente à produção mensal mínima conjunta já havíamos escrito $X_A + X_B \geq 5$ (ton) . Se tivermos presente que a variável "antiga" X_A mais não é do que a soma das variáveis "novas" X_{A1} e X_{A2} e que o mesmo sucede com X_B relativamente a X_{B1} e X_{B2} , pode escrever-se:

Prod.Mensal A+B : $(X_{A1} + X_{A2}) + (X_{B1} + X_{B2}) \geq 5$ (ton)

Relativamente aos aditivos P e Q poderemos escrever duas restrições para cada aditivo (uma relativa a cada fábrica):

Aditivo P :	$1 . X_{A1} + 2 . X_{B1} \leq 10$	(Kg / sem.)	[F1]
	$1 . X_{A2} + 2 . X_{B2} \leq 12$	(Kg / sem.)	[F2]
Aditivo Q :	$3 . X_{A1} + 2 . X_{B1} \leq 18$	(Kg / sem.)	[F1]
	$3 . X_{A2} + 2 . X_{B2} \leq 14$	(Kg / sem.)	[F2]

Com as novas variáveis torna-se fácil escrever a **função objectivo**, que representa o lucro semanal da DUOLACT (em u.m.), que se pretende maximizar:

MAX $F = 6 . X_{A1} + 7 . X_{A2} + 10 . X_{B1} + 11 . X_{B2}$.

Poderemos agora resumir a **formulação do problema 2**:

Seja X_{ij} a quantidade (em toneladas) de farinha i = A ; B a produzir semanalmente na fábrica Fj , j = 1 ; 2 $X_{ij} \geq 0$.

$$\text{MAX} \quad F = 6 \cdot X_{A1} + 7 \cdot X_{A2} + 10 \cdot X_{B1} + 11 \cdot X_{B2} .$$

sujeito a:

$$1 \cdot X_{A1} + 2 \cdot X_{B1} \leq 10$$
$$1 \cdot X_{A2} + 2 \cdot X_{B2} \leq 12$$
$$3 \cdot X_{A1} + 2 \cdot X_{B1} \leq 18$$
$$3 \cdot X_{A2} + 2 \cdot X_{B2} \leq 14$$
$$X_{A1} + X_{A2} + X_{B1} + X_{B2} \geq 5$$

$$X_{A1} , X_{A2} , X_{B1} , X_{B2} \geq 0.$$

Compliquemos um pouco o problema anterior... originando o **problema 3** :

A TRANSLACT é uma empresa que produz dois tipos de farinhas lácteas (A e B) em duas fábricas (F1 e F2).

Estas farinhas são enriquecidas com dois aditivos. Por cada tonelada de farinha A são necessários um quilograma de aditivo P e três quilogramas de aditivo Q. Por cada tonelada de farinha B são necessários dois quilogramas de aditivo P e dois quilogramas de aditivo Q.

Sabe-se que, em cada semana, a fábrica F1 não dispõe de mais de 10 Kg e 18 Kg, respectivamente, de aditivos P e Q. Os correspondentes valores para a fábrica F2 são, respectivamente, 12 Kg e 14 Kg.

Em cada semana é possível transferir entre as duas fábricas qualquer quantidade de aditivos (não utilizados numa fábrica e necessários na outra). A transferência de 1 Kg de qualquer dos aditivos entre as duas fábricas traduz-se num custo de 0,05 u.m. .

Os donos da TRANSLACT exigem que a produção mensal conjunta das farinhas A e B não seja inferior a 20 toneladas.

O quadro seguinte indica os lucros (em u.m.) associados à produção de uma tonelada de cada tipo de farinha, em função da fábrica:

	F1	F2
A	6	7
B	10	11

Como se pode determinar o plano de produção que maximiza o lucro da TRANSLACT ?

Para formularmos este problema poderemos recordar as **três questões importantes**:

1 - Qual o objectivo a atingir ?

À semelhança do problema anterior, também aqui se pretende **maximizar o lucro**.

2 - Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo?

- produzir farinha A em F1 / em F2
- produzir farinha B em F1 / em F2
- transferir aditivo P de F1 para F2
- transferir aditivo P de F2 para F1
- transferir aditivo Q de F1 para F2
- transferir aditivo Q de F2 para F1

3 - Que recursos são consumidos (quando se leva a cabo as actividades referidas) ? Que condicionalismos são impostos ?

- consome-se aditivo P
- consome-se aditivo Q
- exige-se a produção mensal mínima conjunta (A + B) de 20 ton.

Definamos, então, as **variáveis** X_{A1} , X_{A2} , X_{B1} , X_{B2} : genericamente X_{ij} é a quantidade (em toneladas) de farinha **i** = A ; B a produzir semanalmente na fábrica F**j** , **j** = 1 ; 2 . Adicionalmente define-se as **variáveis** T_{P1} , T_{P2} , T_{Q1} , T_{Q2} : genericamente T_{kl} é a quantidade (em Kg) de aditivo **k** = P ; Q a transferir semanalmente da fábrica F_i , i = 1 ; 2 para a outra.

Não nos esqueçamos de indicar que a**s variáveis definidas são não negativas**:

$$X_{A1} , X_{A2} , X_{B1} , X_{B2} , T_{P1} , T_{P2} , T_{Q1} , T_{Q2} \geq 0$$

De notar que:

$$T_{P1} \leq 10 \; ; \quad T_{P2} \leq 12 \; ; \quad T_{Q1} , \leq 18 \; ; \quad T_{Q2} \leq 14$$

Utilizando as variáveis indicadas poderemos indicar resumidamente a **formulação do problema 3**:

Seja X_{ij} a quantidade (em toneladas) de farinha i = A ; B a produzir semanalmente na fábrica Fj , j = 1 ; 2 e T_{kl} é a quantidade (em Kg) de aditivo k = P ; Q a transferir semanalmente da fábrica Fl , l = 1 ; 2 para a outra. X_{ij} , T_{kl} $\geq$ 0 .

MAX $F = 6.X_{A1} + 7.X_{A2} + 10.X_{B1} + 11.X_{B2} - 0{,}05.(T_{P1} + T_{P2} + T_{Q1} + T_{Q2})$

sujeito a:

$$
\begin{aligned}
&1 . X_{A1} + 2 . X_{B1} \leq 10 - T_{P1} + T_{P2} \\
&1 . X_{A2} + 2 . X_{B2} \leq 12 - T_{P2} + T_{P1} \\
&3 . X_{A1} + 2 . X_{B1} \leq 18 - T_{Q1} + T_{Q2} \\
&3 . X_{A2} + 2 . X_{B2} \leq 14 - T_{Q2} + T_{Q1} \\
&X_{A1} + X_{A2} + X_{B1} + X_{B2} \geq 5 \\
&T_{P1} \leq 10 \; ; \quad T_{P2} \leq 12 \; ; \quad T_{Q1} \leq 18 \; ; \quad T_{Q2} \leq 14
\end{aligned}
$$

$$X_{A1} , X_{A2} , X_{B1} , X_{B2} , T_{P1} , T_{P2} , T_{Q1} , T_{Q2} \geq 0 .$$

Os problemas 1, 2 e 3 anteriores são problemas de **Programação Linear**. Com efeito, quer a função objectivo, quer as restrições são lineares, sendo as variáveis não negativas.

O problema 4 seguinte poderá formular-se seguindo um raciocínio exactamente igual ao seguido para a formulação dos problemas anteriores. No entanto, este novo problema não é um *simples* problema de Programação Linear, mas sim de **Programação Linear Inteira**: embora as restrições e a função objectivo sejam lineares, as variáveis são inteiras (respeitando ainda a condição de não negatividade).

A **formulação** de um problema não apresenta qualquer particularidade por se exigir que as variáveis tomem valores inteiros (basta indicar essa condição) ... No entanto, a **resolução** de um Problema de Programação Linear Inteira exige alguns cuidados especiais, que a seu tempo serão referidos.

Consideremos agora o seguinte **problema 4** :

"A Guerra está iminente !", exclamou o General. "É preciso tomar algumas decisões !".

O País pode dispor de 2 000 unidades monetárias (u.m.) de imediato e de 1 500 u.m. dentro de 90 dias. Poderão ser enviados de imediato 100 bombardeiros, 20 fragatas, 500 tanques e 80 000 homens. Dentro de 90 dias poderão ser enviados mais 30 bombardeiros, 10 fragatas, 200 tanques e 30 000 homens.

O envio de cada bombardeiro, fragata, tanque e 1 000 homens custará ao País, respectivamente, 2 u.m., 6 u.m. , 1 u.m. e 1 u.m. . As reservas financeiras disponíveis de imediato deverão assegurar quer o envio imediato de homens e material, quer a sua manutenção nos próximos 90 dias.

As reservas financeiras disponíveis dentro de 90 dias deverão assegurar quer o envio posterior de homens e material, quer a manutenção da totalidade dos homens e materiais enviados desde o início do conflito durante, pelo menos, mais 90 dias.

O custo de manutenção de 1 bombardeiro, 1 fragata, 1 tanque e 1000 homens durante 90 dias é, respectivamente, igual a 10 u.m., 8 u.m., 1 u.m. e 1 u.m. .

De acordo com peritos militares, o número total de tanques deverá ser maior ou igual ao quíntuplo do número total de bombardeiros. Por outro lado, em cada envio de homens e materiais, deverão ser enviados, pelo menos, 1 000 homens por cada bombardeiro.

Estima-se que a eficácia (medida em unidades de eficácia militar - u.e.m.) de homens e material seja função da altura do seu envio, de acordo com o quadro seguinte.

Envio de:	Envio dentro de 90 dias	Envio imediato
1 000 homens	6	9
1 bombardeiro	9	10
1 fragata	4	5
1 tanque	1	3

Sabendo que se pretende maximizar a eficácia militar total face à Guer-ra que se aproxima, ajude os responsáveis militares do País na tomada de decisões.

Para formularmos este problema poderemos recordar as **três questões importantes**:

1 - Qual o objectivo a atingir ?

Relativamente a este problema, o enunciado é relativamente explícito : **pretende--se maximizar a eficácia militar total**.

Note-se que neste mesmo problema poder-se-ia conceber outros objectivos - a título de exemplo pode referir-se "maximizar a eficácia militar imediata", "minimizar o custo total (respeitando um nível mínimo de eficácia militar total)", "minimizar o número total de homens a enviar (respeitando um nível mínimo de eficácia militar total)".

2 - Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo?

Relativamente ao problema em análise poderemos indicar sucintamente as decisões que irão influir na eficácia militar:

- enviar homens para a Guerra
- enviar bombardeiros para a Guerra
- enviar fragatas para a Guerra
- enviar tanques para a Guerra

3 - Que recursos são consumidos (quando se leva a cabo as actividades referidas) ? Que condicionalismos são impostos ?

Como se pode constatar pelo enunciado:
- as actividades referidas traduzem-se num dispêndio do **recurso financeiro** ;
- um condicionalismo a ter em conta diz respeito ao **número de homens, bombardeiros, fragatas e tanques disponíveis** ;
- um outro condicionalismo a ter em conta diz respeito, por um lado, à **relação entre o número total de tanques e o número total de bombardeiros enviados** e, por outro lado, à **relação entre o número de homens e o número de bombardeiros enviados**.

Retomemos a questão **2** (**Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo?**). Poderemos associar às respostas a esta questão (**enviar homens / enviar bombardeiros / enviar fragatas / enviar tanques**) uma nova questão: **Quanto ? Com que intensidade se deve levar a cabo as actividades referidas ?**

Que actividades ?	→	**Quanto ?**
enviar Homens	→	X_H
enviar Bombardeiros	→	X_B
enviar Fragatas	→	X_F
enviar Tanques	→	X_T

Definamos, então, as **variáveis** X_H , X_B , X_F e X_T :
X_H é o número total de homens a enviar para a Guerra;
X_B é o número total de bombardeiros a enviar para a Guerra;
X_F é o número total de fragatas a enviar para a Guerra;
X_T é o número total de tanques a enviar para a Guerra.

- Uma primeira conclusão a reter diz respeito à não negatividade destas variáveis:

$X_H \geq 0$, $X_B \geq 0$, $X_F \geq 0$ e $X_T \geq 0$.

- Por outro lado, **estas variáveis são inteiras**.

Retomemos a questão **3** (**Que recursos são consumidos (quando se leva a cabo as actividades referidas) ? Que condicionalismos são impostos ?**) que tinha três respostas (recursos financeiros; recursos humanos e materiais; relações impostas pelos peritos militares).

Recordemos esta última resposta: **De acordo com peritos militares, o número total de tanques deverá ser maior ou igual ao quíntuplo do número total de bombardeiros. Por outro lado, em cada envio de homens e materiais, deverão ser enviados, pelo menos, 1 000 homens por cada bombardeiro.**

Poderemos tentar exprimir estes condicionalismos utilizando as variáveis definidas anteriormente:

O número total de tanques (X_T) deverá ser maior ou igual ao quíntuplo do número total de bombardeiros (X_B) , isto é : $X_T \geq 5 . X_B$.

O número *total* de homens a enviar (X_H) deverá ser maior ou igual a 1 000 vezes o número *total* de bombardeiros enviados (X_B), isto é : $X_H \geq 1\,000 . X_B$. Esta representação não está rigorosamente correcta, já que o enunciado refere explicitamente "**em cada envio de homens e materiais**" ... Ora o que foi feito disse respeito à relação entre números *totais ...*

A questão **3** admitia ainda duas outras respostas (recursos financeiros; recursos humanos e materiais): de acordo com o enunciado pode dispor-se imediatamente de 2 000 u.m. e, dentro de 90 dias de 1 500 u.m. adicionais. Como relacionar estas informações com as variáveis definidas ?

Sabemos quanto custa o envio de cada bombardeiro, fragata, tanque e 1 000 homens (respectivamente, 2 u.m., 6 u.m. , 1 u.m. e 1 u.m.), pelo que é relativamente fácil indicar o **Custo Total de Envio** (igual a $2 . X_B + 6 . X_F + 1 . X_T + 0{,}001 . X_H$) . No entanto, não poderemos exprimir o **Custo Total de Manutenção**, já que a determinação deste custo obriga ao conhecimento dos envios de homens e material em duas fases: de imediato e dentro de 90 dias.

Analogamente, se retomarmos a resposta dada à questão **1** (pretende-se maximizar a **Eficácia Militar Total**) e se tentarmos exprimir a eficácia militar total em função das variáveis definidas, constataremos não ser possível fazê-lo já que a determinação desta eficácia total obriga ao conhecimento dos envios de homens e material em duas fases: de imediato e dentro de 90 dias.

Assim, pode concluir-se que **a definição de variáveis que foi feita não é suficientemente *fina***. Tal, no entanto, não corresponde a dizer que o que foi feito está errado ! ... Torna-se apenas necessário ***refinar*** a definição feita de modo a poder contemplar os aspectos referidos (conhecimento dos envios de homens e material em duas fases: de imediato e dentro de 90 dias) .

Retomemos, então a questão **2** (**Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo?**). **Quanto ? Com que intensidade se deve levar a cabo as actividades referidas ?** E, já agora, **quando ?**

Que actividades ? → **Quanto ?** → **Quando ?**

$$\textbf{enviar Homens} \rightarrow X_H \rightarrow \begin{cases} \textbf{imediato} \rightarrow X_{H0} \\ \textbf{90 dias} \rightarrow X_{H1} \end{cases}$$

$$\textbf{enviar Bombardeiros} \rightarrow X_B \rightarrow \begin{cases} \textbf{imediato} \rightarrow X_{B0} \\ \textbf{90 dias} \rightarrow X_{B1} \end{cases}$$

$$\textbf{enviar Fragatas} \rightarrow X_F \rightarrow \begin{cases} \textbf{imediato} \rightarrow X_{F0} \\ \textbf{90 dias} \rightarrow X_{F1} \end{cases}$$

$$\textbf{enviar Tanques} \rightarrow X_T \rightarrow \begin{cases} \textbf{imediato} \rightarrow X_{T0} \\ \textbf{90 dias} \rightarrow X_{T1} \end{cases}$$

Definamos, então, as **variáveis** X_{H0} , X_{H1} , X_{B0} , X_{B1} , X_{F0} , X_{F1} , X_{T0} , X_{T1}:

X_{H0} é o número de homens a enviar de imediato para a Guerra;
X_{H1} é o número de homens a enviar dentro de 90 dias para a Guerra;

X_{B0} , X_{B1} , X_{F0} , X_{F1} , X_{T0} , X_{T1} definem-se analogamente em relação aos **B**ombardeiros, **F**ragatas e **T**anques.

Não nos esqueçamos de indicar que a**s variáveis definidas são inteiras e não negativas**:

$$X_{H0} , X_{H1} , X_{B0} , X_{B1} , X_{F0} , X_{F1} , X_{T0} , X_{T1} \geq 0 \quad \textbf{e} \quad \textbf{inteiras}.$$

Recordemos os dois condicionalismos impostos pelos peritos militares: **o número total de tanques deverá ser maior ou igual ao quíntuplo do número total de bombardeiros** (condicionalismo que já tínhamos conseguido representar correctamente com as "variáveis antigas")**. Por outro lado, em cada envio de homens e materiais, deverão ser enviados, pelo menos, 1 000 homens por cada bombardeiro.**

Utilizando as novas variáveis, poderemos exprimir os condicionalismos referidos:

O número total de tanques ($X_{T0} + X_{T1}$) deverá ser maior ou igual ao quíntuplo do número total de bombardeiros ($X_{B0} + X_{B1}$) , isto é : $X_{T0} + X_{T1} \geq 5 . (X_{B0} + X_{B1})$.

Por outro lado, **em cada envio de homens e materiais**, o número de homens (X_{H0} **ou** X_{H1}) deverá ser maior ou igual a 1 000 vezes o número de bombardeiros enviados (X_{B0} **ou** X_{B1}), isto é : $X_{H0} \geq 1\,000 \,.\, X_{B0}$, relativamente ao envio imediato **e** $X_{H1} \geq 1\,000 \,.\, X_{B1}$, relativamente ao envio dentro de 90 dias.

Analisemos agora as questões associadas aos recursos financeiros, humanos e materiais que não podiam ser convenientemente representados pelas "variáveis antigas":

- De acordo com o enunciado pode dispor-se imediatamente de 2 000 u.m. e, dentro de 90 dias de 1 500 u.m. adicionais.

Sabemos quanto custa o envio de cada bombardeiro, fragata, tanque e 1 000 homens (respectivamente, 2 u.m., 6 u.m. , 1 u.m. e 1 u.m.), pelo que é relativamente fácil determinar o **Custo Total de Envio associado a cada uma das fases de envio de homens e materiais (CTE0 e CTE1)** :

CTE0 = 2 . X_{B0} + 6 . X_{F0} + 1 . X_{T0} + 0,001 . X_{H0} e

CTE1 = 2 . X_{B1} + 6 . X_{F1} + 1 . X_{T1} + 0,001 . X_{H1} .

Quanto ao **Custo Total de Manutenção correspondente aos primeiros 90 dias (CTM0)**, pode determinar-se:

CTM0 = 10 . X_{B0} + 8 . X_{F0} + 1 . X_{T0} + 0,001 . X_{H0}

O **Custo Total de Manutenção correspondente ao segundo período de 90 dias (CTM1)**, pode determinar-se:

CTM1 = 10 .(X_{B0} + X_{B1}) + 8 .(X_{F0} + X_{F1}) + 1 .(X_{T0} + X_{T1}) + 0,001 .(X_{H0} + X_{H1})

(recorde-se que, de acordo com o enunciado, no segundo período de 90 dias terá de ser assegurada a manutenção (durante 90 dias) dos homens e materiais expedidos de início **e** após os primeiros 90 dias).

Assim, poderemos agora escrever as **restrições associadas ao recurso financeiro**:

- inicialmente: **CTE0 + CTM0 $\leq$ 2 000**, ou equivalentemente,

12 . X_{B0} + 14 . X_{F0} + 2 . X_{T0} + 0,002 . X_{H0} $\leq$ 2 000 .

- dentro de 90 dias: **CTE1 + CTM1 $\leq$ 1 500**, ou equivalentemente,

10.X_{B0} + 8. X_{F0} + 1.X_{T0} + 0,001.X_{H0} + 12.X_{B1} + 14.X_{F1} + 2.X_{T1} + 0,002. X_{H1} $\leq$ 1 500 .

Poderemos também escrever os **condicionalismos decorrentes das disponibilidades de homens e materiais**:

- inicialmente: **X_{B0} $\leq$ 100 ; X_{F0} $\leq$ 20 ; X_{T0} $\leq$ 500 ; X_{H0} $\leq$ 80 000 ;**
- dentro de 90 dias: **X_{B1} $\leq$ 30 ; X_{F1} $\leq$ 10 ; X_{T1} $\leq$ 200 ; X_{H0} $\leq$ 30 000 ;**

Deveremos agora abordar a questão **1** (Qual o **objectivo** a atingir ?) e tentar exprimir a sua resposta (pretende-se **maximizar a eficácia militar total**) em função das "novas variáveis" (já que as "antigas" também não eram adequadas ...).

Se designarmos por **F** **a eficácia militar total** (em u.e.m.), poderemos facilmente concluir que:

$$\mathbf{F = (10.X_{B0} + 5.\ X_{F0} + 3.X_{T0} + 0{,}009.X_{H0}) + (9.X_{B1} + 4.X_{F1} + 1.X_{T1} + 0{,}006.\ X_{H1})}\ .$$

Poderemos agora resumir a **formulação do problema**:

Seja X_{ij} o número de unidades de i = H (Homens); B (Bombardeiros); F (Fragatas); T (Tanques) a enviar para a Guerra na fase j = 0 (envio imediato); 1 (envio dentro de 90 dias), com $X_{ij} \geq 0$ e inteiras .

$$\text{MAX } F = 10.X_{B0} + 5.X_{F0} + 3.X_{T0} + 0{,}009.X_{H0} + 9.X_{B1} + 4.X_{F1} + 1.X_{T1} + 0{,}006.X_{H1}$$

sujeito a:

$$X_{B0} \leq 100\ ;\ X_{F0} \leq 20\ ;\ X_{T0} \leq 500\ ;\ X_{H0} \leq 80\,000\ ;$$
$$X_{B1} \leq 30\ ;\ X_{F1} \leq 10\ ;\ X_{T1} \leq 200\ ;\ X_{H0} \leq 30\,000\ ;$$

$$12.X_{B0} + 14.X_{F0} + 2.X_{T0} + 0{,}002.X_{H0} \leq 2\,000$$

$$10.X_{B0} + 8.X_{F0} + 1.X_{T0} + 0{,}001.X_{H0} + 12.X_{B1} + 14.X_{F1} + 2.X_{T1} + 0{,}002.X_{H1} \leq 1\,500$$

$$X_{H0} \geq 1\,000\ .\ X_{B0}$$
$$X_{H1} \geq 1\,000\ .\ X_{B1}$$
$$X_{T0} + X_{T1} \geq 5\ .\ (X_{B0} + X_{B1})$$

$$X_{H0}\ ,\ X_{H1}\ ,\ X_{B0}\ ,\ X_{B1}\ ,\ X_{F0}\ ,\ X_{F1}\ ,\ X_{T0}\ ,\ X_{T1} \geq 0 \ \text{ e inteiras.}$$

E cá está a formulação de um **problema de Programação Linear Inteira** ... Como se viu, o raciocínio seguido em nada difere dos problemas anteriores (de Programação Linear).

A formulação de problemas poderá estar ligada a temas tão diversos quanto o planeamento da construção de habitações, o planeamento da renovação de frotas, o planeamento da produção industrial, o planeamento de acções culturais, o planeamento da abertura de balcões bancários ... o que mostra a sua importância. Por isso, mão à obra: é tempo de espreitar os Exercícios Propostos e fazer algumas formulações!